На правах рукописи

Михайлова Алина Николаевна

Конформно-дифференциальная геометрия гиперполосы

01.01.04 – геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань-2002

Работа выполнена в Чувашском государственном педагогическом университете имени И.Я.Яковлева

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Столяров А.В.

Официальные оппоненты:
доктор физ.-мат. наук, профессор Шурыгин В.В.
доктор физ.-мат. наук, профессор Игошин В.А.

Ведущая организация: Калининградский государственный университет

Защита состоится 27 ноября 2002 года в 15.30 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 Казанского государственного университета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, корпус 2, конференц-зал научной библиотеки КГУ.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Казанского государственного университета

Автореферат разослан ____ октября 2002 года

Ученый секретарь диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук, доцент
/М.А.Малахальцев/

I. Общая характеристика диссертации

Постановка вопроса и актуальность темы. Конформно-дифференциальная геометрия трехмерного пространства начала развиваться в рамках классической дифференциальной геометрии в конце XIX века в работах Дарбу, Рибокура и других геометров. В начале двадцатого века в работах Фосса, Роте, Огура, Фубини строятся конформно-дифференциальные инварианты поверхности и конформно-инвариантные квадратичные формы. Полисферическая система координат для изучения конформно-дифференциальной геометрии поверхностей введена в рассмотрение впервые в работе Томсена[1], опубликованной в 1924 г. Вессио[2] изучает конформную геометрию двумерной поверхности V_2 в пространстве C_3, пользуясь пентасферическими координатами.

Теория связностей занимает в дифференциальной геометрии существенное место и восходит к работам Т. Леви-Чивита, Г.Вейля, Э.Картана, Ш.Эресмана, В.В.Вагнера, А.П.Нордена, Г.Ф.Лаптева, П.К.Рашевского, А.М.Васильева, Ю.Г.Лумисте, Л.Е.Евтушика и многих других геометров. Специальное место в общей теории занимает теория связностей в однородных расслоениях; в рамках этой теории линейные связности чаще всего находят приложение при изучении геометрии оснащенных подмногообразий.

Следует отметить, что аффинные и проективные связности изучались в работах многих геометров. Понятие n-мерного пространства конформной связности появилось в работах Э.Картана[3] в 1923 г., в которых он рассматривает m-мерную поверхность в пространстве конформной связности, также конформные связности, индуцируемые на этой поверхности связностью объемлющего пространства, вопросы конформного отображения и наложимости таких поверхностей. В работах С.Сасаки[4] в 1939-40 гг. развивается теория кривых и гиперповерхностей в пространстве конформной связности.

Б.А. Розенфельд[5] применяет к изучению конформной геометрии общую теорию образов симметрии в однородных пространствах. Исследова-

---

[1] *Thomsen G.* Über konforme Geometrie. I. Grundlagen der konformen Flachentheorie // Abhandl math. Semin. Univ. Hamburg.- 1924. -T.3.-S.31-56.

[2] *Vessiot E.* Contribution ă la geometrie conforme. Thèorie des surfaces// Bull. Soc. math. France.-1926.-T.54.-P.139-179; 1927.-T.55.-P.39-79.

[3] *Картан Э.* Пространства аффинной, проективной и конформной связности.И.Л. - Изд. Казанск. ун-та, 1962.- 210 с.

[4] *Sasaki S.* Om the theory of curves in a curved conformal space. Sci. Repts. Tôhoku Univ. –1939.-27. –P. 392-409.

Sasaki S. On the theory of surfaces in a curved conformal space. Sci. Repts. Tôhoku Univ.- 1940. – 28. - P. 261-285.

[5] *Розенфельд Б.А.* Метрический метод в проективно-дифференциальной геометрии и ее конформных и контактных аналогах // Матем. сб. –1948.-Т.22.-№ 3.-С.457-492.

Розенфельд Б.А. Конформно-дифференциальная геометрия семейств C_m в C_n. // Матем. сб. –1948.-Т.23.-С.298-312.

ния Р.М. Гейдельмана[1] посвящены изучению фокальных свойств конгруэнции m-мерных сфер S^m пространства C_n. Работы В.И.Ведерникова[2] посвящены теории конгруэнции гиперсфер в пространстве C_n и конформному изгибанию нормализованных поверхностей.

При построении теории многомерных поверхностей в аффинном, проективном и конформном пространствах встречается ряд трудностей. Эти трудности связаны с тем, что на поверхностях в этих пространствах не удается определить инвариантные связности, пользуясь их первыми дифференциальными окрестностями. Для изучения геометрии многомерных поверхностей проективного пространства и других однородных пространств, фундаментальная группа которых является подгруппой проективной группы, А.П.Норден[3] разработал метод нормализации; в указанных работах, а также совместно с Г.В.Бушмановой[4] им получены существенные результаты по конформно-дифференциальной геометрии различных подмногообразий.

Новый инвариантный аналитический метод дифференциально-геометрических исследований многообразий, вложенных в однородные пространства и в пространства с фундаментально-групповой связностью, был развит Г.Ф.Лаптевым[5]. При этом задача сводится к изучению геометрии подмногообразия посредством исследования дифференциально-геометрических структур, индуцированных полями фундаментальных и оснащающих объектов подмногообразия.

Метод Г.Ф. Лаптева был применен М.А.Акивисом[6] к построению основ инвариантной теории гиперповерхностей, m-мерных поверхностей n-

---

[1] *Гейдельман Р.М.* К конформно-дифференциальной теории конгруэнций окружностей // Матем. сб. – 1951.-Т.29.-№2.-С.313-348.

Гейдельман Р.М. К теории конгруэнций окружностей в многомерном конформном пространстве // Докл. АН СССР.-1955.-Т.102.-№4.- С. 669-672.

Гейдельман Р.М. К теории псевдоконгруэнций и конгруэнций плоскостей многомерного гиперболического пространства и конгруэнций многомерного конформного пространства // Матем. сб. –1955.-Т.36.-№2.- С. 209-232.

[2] *Ведерников В.И.* Конформная наложимость поверхностей // Докл. АН СССР.- 1950.-Т.73.- С. 437-440.

Ведерников В.И. Поверхности, огибающие семейство гиперсфер // Изв. вузов. Математика. –1957.-№1.-С. 89-97.

Ведерников В.И. Конформная наложимость поверхностей в пространстве M_n // Изв. вузов. Математика. – 1963.-№1.-С. 33-41.

[3] *Норден А.П.* О нормализованных поверхностях пространства Мебиуса // Доклады АН СССР.- 1948.-Т. 61.-№ 2.-С. 207-210.

Норден А.П. Конформная интерпретация пространства Вейля // Матем. сб.-1949. –Т.24.-№1.-С. 75-85.

Норден А.П. О нормализованных поверхностях конформного пространства // Изв. АН СССР .- Сер. Матем.- 1950.-Т. 14.- № 2.- С.105-122.

[4] *Бушманова Г.В., Норден А.П.* Элементы конформной геометрии. –Казань: КГУ, 1972. –178 с.

[5] *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. –1953. – Т.2.- С.275-382.

[6] *Акивис М.А.* Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства. //Матем. сборник. -1952.-Т.31.- №1.- С. 43-75.

Акивис М.А. К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей // Матем. сборник. -1961. -Т.53. -№1. -С.53-72.

Akivis M.A.,Goldberg V.V. Conformal differential geometry and its generalizations. - USA.-1996.- 400 p.

мерного конформного и псевдоконформного пространств. В его работах в третьей дифференциальной окрестности построено инвариантное оснащение m-мерной поверхности и гиперповерхности n-мерного конформного пространства, то есть каждой точке поверхности внутренним образом присоединены m-мерная касательная сфера S^m и нормальная (n-m)-сфера S^{n-m}. С помощью инвариантного оснащения на поверхностях строятся конформная связность и связность Вейля, внутренним образом присоединенные к этой поверхности, а также система конформно-инвариантных тензоров, определяющих поверхность V_m конформного пространства с точностью до конформных преобразований. В своих исследованиях М.А.Акивис изучает также поверхности, несущие сеть линий кривизны.

Подробный обзор работ по конформно-дифференциальной геометрии, выполненных до 1963 года, сделан в работе М.А.Акивиса[1]. Остановимся на исследованиях геометров, выполненных после 1964 года.

Н.В.Шульга[2] вводит понятие пары T m-мерных поверхностей n-мерного конформного пространства C_n и пары Θ двумерных поверхностей псевдоконформного пространства ${}^2C_4$, изучает их геометрию, используя интерпретации Дарбу и Плюккера. Следует отметить, что интерпретации Дарбу n-мерного конформного пространства в (n+1)-мерное проективное пространство в последние десятилетия зарубежными геометрами уделяется большое внимание[3].

Р.Ф.Бронштейн[4] строит конформную теорию распределений m-мерных линейных элементов; исследует гиперраспределения, распределения m-мерных линейных элементов, а также распределения конформного пространства C_n, определяемые нуль-системами проективного пространства P_{n+1}. При этом распределение m-мерных линейных элементов не выделяется как основной подобъект, используется и его дополнение, относящееся в данном случае к ортогональному распределению.

---

[1] *Акивис М.А.* Конформно-дифференциальная геометрия. //Итоги науки. Геометрия (1963)/ ВИНИТИ АН СССР.- М.-1965.- С.108-137.

[2] *Шульга Н.В.* Конформно-дифференциальная геометрия семейств прямых пространства Лобачевского. // БелНИИНТИ.-Рук. деп. 18 июня 1984 г.- №890Бел-Деп.

[3] *Schilmangk Christina, Sulanke Rolf.* Submarifolds of the Möbius space // Math. Nachr.–1980.–96. - P.165-183.
Strambach Karl. Der Kreisraum einer sphärischen Möbiusebene. // Monatsh. Math. – 1974. -78, №2.-S.156-163.
Tölke Jurgen. Eine Deutung der γ -Hauptkreise im proektiven Modell der Möbius Geometry. // Arch. Math. – 1974.- 25, №4.-S.426-430.
Wernicke Bernd. Möbiusebenen in Spiegelungsgeometriescher Dantstellung. // Stud. sci. math. hung. –1986. - 21, № 3-4. -S. 363-372.
Wilker J. B. Möbius transformations and isoclinal sequences of spheres // Alquat. math. –1986.- 30, № 2-3. - P.161-179.
Wilker J.B. Groups of elliptic Möbiustransformations. // Math. Repts Acad. Sci. Can.-1984. -6,№ 3. -P. 133-138.
Wilker J.B. Möbius equivalence and Eucliden symmetry. // Amer. Math. Mon.-1984. - 91, №4.- P.225-247.

[4] *Бронштейн Р.Ф.* Об одном классе многомерных распределений в конформном пространстве // Ткани и квазигруппы. – Калинин. - 1982.- С. 18-24.
Бронштейн Р.Ф. К конформной теории многомерных распределений // Геометрия погруженных многообразий. – М.: МГПИ им. В.И. Ленина. – 1983.- С.17-25.

В докторской диссертации Харта Иогана[1] рассмотрены некоторые вопросы геометрии поверхностных полос и однопараметрических семейств гиперсфер (М-кривых) конформного пространства.

Л.Ф.Филоненко[2] в своих работах, исходя из геометрии квадратичной гиперполосы в n-мерном проективном пространстве P_n, рассматривает распределение m-мерных линейных элементов в (n-1)-мерном конформном пространстве, используя, в основном, его проективную интерпретацию. Значительное внимание уделяется возникающим при этом связностям, как вейлевой связности во всем пространстве, так и разного рода касательным и нормальным связностям распределения.

Исследования А.В.Столярова[3] посвящены изучению геометрии оснащенных взаимно-ортогональных распределений m-мерных и (n-m)-мерных линейных элементов, аффинных и конформных связностей, индуцируемых оснащениями этих распределений.

Объектом исследования настоящей работы является гиперполоса H_m, погруженная в собственно конформное пространство C_n (m<n-1).Теория регулярной гиперполосы H_m, вложенной в n-мерное (m<n-1) центроаффинное, аффинное и проективное пространства и в пространство проективной связности, получила достаточное развитие (например, в работах В.В.Вагнера, А.В.Чакмазяна, Ю.И.Попова, А.В.Столярова, В.И.Шуликовского и др.). В.В.Вагнер[4] посвятил свои исследования локальным гиперполосам центроаффинного пространства. Ю.И.Попов[5] изучает внутреннюю геометрию регулярной гиперполосы, строит теорию вырожденных гиперполос и их обобщений в проективном и аффинном пространствах. Исследования А.В.Столярова[6] посвящены изучению двойственной геометрии гиперполосы (голономной и неголономной), погруженной в проективное пространство P_n или пространство проективной связно-

---

[1] *Harte Johann*. Zur Mőbius-Differentialgeometrie der Streifen und M-Kurven. Diss. Doct. Naturwiss. Fachbereich Math. Techn. Univ. München.-1979,VI.. - 139 s.

[2] *Филоненко Л.Ф.* Квадратичная гиперполоса и нормальные связности подмногообразия конформного пространства. // Уч. зап. Тарт. ун-та. –1988.-№ 803.-С. 115-131.

Филоненко Л.Ф. Распределение m-мерных линейных элементов в конформном пространстве и присоединенные к нему связности // Дифференциальная геометрия многообразий фигур.-1995.-№ 26.- С. 89-102.

[3] *Столяров А.В.* Конформно-дифференциальная геометрия оснащенных распределений // ВИНИТИ РАН.-2000. -№ 629.-В00Деп. –21 с.

Столяров А.В. Линейные связности на распределениях конформного пространства // Изв. вузов. Математика-2001.-№3(466).-С.60-72.

[4] *Вагнер В.В.* Теория поля локальных гиперполос // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу.- МГУ.- 1950.- Вып. 8.- С. 197-272.

[5] *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос. – Калининград.-1983.- 83 с.

Попов Ю.И. Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства: Монография. – СПб.: Изд-во С.- Петербургского ун-та, 1992.-172 с.

[6] *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий: Монография. 2-е изд., доп. – Чебоксары: Изд-во Чувашского госпединститута, 1994.-290 с.

Столяров А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии. /Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР.- М.- 1975.- Т.7.- С. 117-152.

сти $P_{n,n}$. Нормальные связности на оснащенной регулярной гиперполосе H_m проективного пространства P_n изучаются в работах П.А.Фисунова[1].

Следует отметить, что конформно-дифференциальная геометрия гиперполосы H_m в C_n до настоящего времени не изучалась.

Изучение геометрии полос и, в частности, гиперполос в пространствах с различными фундаментальными группами представляет большой научный интерес и является актуальным в связи с многочисленными приложениями ее в математике, механике и физике. Например, В.В. Вагнер[2] приводит следующие приложения теории поля локальных регулярных гиперполос в дифференциально-геометрическом пространстве X_n, а именно:

а) к задаче вариационного исчисления на безусловный экстремум;

б) к вариационной задаче Лагранжа;

в) к неголономной геометрии V_n^m в X_n;

г) к динамике склерономных механических систем с нелинейными неголономными связями.

Цель работы. Целью настоящего диссертационного исследования является инвариантное построение основ теории гиперполосы H_m, погруженной в собственно конформное пространство C_n; эта теория включает в себя решение следующих ключевых задач:

1) осуществить подход к изучению геометрии гиперполосы H_m в собственно конформном пространстве C_n с общих позиций, а именно, от геометрии неголономной гиперполосы (то есть гиперполосного распределения) с использованием подобъектов ее фундаментальных объектов порядка s=1,2,3 перейти к геометрии голономной гиперполосы H_m; доказать теоремы существования как неголономной, так и голономной гиперполос, погруженных в собственно конформное пространство C_n;

2) путем построения и изучения полей фундаментальных и охваченных геометрических объектов различного порядка на гиперполосе H_m инвариантным образом провести исследование ее внутренней геометрии, а именно:

   а) в разных дифференциальных окрестностях построить различные инвариантные внутренним образом определяемые нормальные и касательные оснащения гиперполосы;

   б) доказать основную теорему в теории гиперполосы H_m в C_n, то есть найти ее полный внутренний фундаментальный объект;

[1] *Фисунов П.А.* О нормальных связностях, индуцируемых на оснащенной регулярной гиперполосе // ВИНИТИ РАН. – 1998.- 20 с. - № 3394-В98Деп.

Фисунов П.А. Центропроективные связности на расслоениях регулярной гиперполосы проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур.–Калининград.–1999. –Вып.30. –С. 89-94.

[2] *Вагнер В.В.* Теория поля локальных гиперполос // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу.- МГУ.- 1950.- Вып. 8.- С. 197-272.

3) исследовать дифференциально-геометрические структуры на гиперполосе H_m в C_n, индуцируемые полями ее фундаментальных и оснащающих объектов, а именно, изучить некоторые вопросы геометрии линейных связностей (аффинных, нормальных и конформных) на нормально или касательно оснащенном подмногообразии H_m.

Методы исследования. В диссертационной работе используются инвариантные методы дифференциально-геометрических исследований, а именно, метод продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева[1] и метод внешних дифференциальных форм Э. Картана[2]; это позволило получить дифференциально-геометрические факты, связанные с окрестностями до третьего порядка включительно.

Все результаты получены в минимально специализированном репере, благодаря чему они сформулированы в инвариантной форме.

Научная новизна. Результаты, полученные в работе в ходе решения поставленных задач (см. цель работы), являются новыми. Научная новизна их обусловлена тем, что изучением дифференциальной геометрии гиперполосы в конформном пространстве до настоящего времени никто не занимался. Изучение геометрии гиперполосы H_m в C_n через исследование дифференциально-геометрических структур, индуцируемых полями ее фундаментальных и оснащающих объектов, позволило вскрыть новые аспекты темы; основные положения их заключаются в следующем:

1.Голономная гиперполоса определена полями фундаментальных подобъектов неголономной гиперполосы; доказаны теоремы существования неголономной и голономной гиперполос (глава I).

2. В разных дифференциальных окрестностях построены инвариантные оснащения гиперполосы полями нормальных (n-m)-сфер и касательных m-сфер (глава II).

3. Найден полный внутренний фундаментальный объект гиперполосы (глава II).

4. Изучаются линейные связности, индуцируемые на нормально или касательно оснащенной гиперполосе (глава III).

5. Найдено приложение аффинных связностей, индуцируемых нормальным оснащением гиперполосы H_m, к изучению геометрии ортогональных сетей на этом подмногообразии (глава III).

В диссертационной работе приведены доказательства всех основных выводов; эти выводы сформулированы в виде теорем.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа имеет теоретическое значение, полученные в ней результаты дополняют исследования по изучению подмногообразий конформного пространства. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по изучению

---

[1] *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. –1953. – Т.2.- С.275-382.

[2] *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.-М.-Л.:ГИТТЛ,1948.-432с.

подмногообразий, вложенных в псевдоконформные пространства, при изучении дифференцируемых подмногообразий в пространствах с конформной структурой.

Теория, разработанная в диссертации, может быть использована в качестве специальных и факультативных лекционных курсов для студентов старших курсов и аспирантов математических факультетов, а также при выполнении ими курсовых, дипломных и научных работ.

Апробация. Основные результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах по современным проблемам геометрии: на заседаниях научно-исследовательского семинара молодых исследователей при кафедре геометрии Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева (1999-2001 гг.), на научных сессиях аспирантов, докторантов и научных сотрудников Чувашского государственного педагогического университета имени И.Я. Яковлева (1999-2001 гг.), на итоговой конференции преподавателей Чувашского государственного педагогического университета имени И.Я. Яковлева (2001 г.), на заседании научно-исследовательского геометрического семинара Казанского государственного университета(2001 г.), на IX Международной конференции «Математика. Экономика. Экология. Образование» (г. Чебоксары, ЧГУ, 2001 г.), на Международной молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения» (г.Казань, 2001 г.).

Публикации. Основные научные результаты, включенные в работу, опубликованы в 10 печатных работах автора (см. [1]-[10]).

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертационная работа является самостоятельным исследованием автора. Все опубликованные научные работы по теме исследования выполнены без соавторов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения (общая характеристика работы), трех глав и списка литературы, включающего 80 наименований. Полный объем диссертации составляет 112 страниц машинописного текста.

Некоторые замечания. Все рассмотренные в настоящей работе исследования проводятся с локальной точки зрения. Все встречающиеся функции предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми (то есть изучаемые подмногообразия достаточно гладкие), а при доказательстве теорем существования – аналитическими.

Во всей работе индексы принимают следующие значения:

$$\bar{I},\bar{K},\bar{L}=\overline{0,n+1};\ I,K,L=\overline{1,n};\quad i,j,k,l,r,s,t=\overline{1,m};\ \bar{i},\bar{j},\bar{k},\bar{l}=\overline{0,m};$$

$$\alpha,\beta=\overline{m+1,n};\ u,v,w=\overline{m+1,n-1};\ \bar{\alpha},\bar{\beta}=0,\overline{m+1,n}.$$

II. Содержание диссертации

Работа состоит из трех глав.

Г л а в а I посвящена определению гиперполосного распределения (неголономной гиперполосы) и гиперполосы, погруженных в собственно конформное пространство, выводу их дифференциальных уравнений и доказательству теорем существования.

В §§ 1,2 приводится материал, носящий реферативный характер и необходимый для дальнейшего изложения.

§ 3 первой главы посвящен выводу дифференциальных уравнений гиперполосного распределения и гиперполосы.

Гиперполосным распределением H m-мерных линейных элементов, по аналогии с проективным пространством[1], нами названа (§ 3, п. 1) пара распределений – распределение M m-мерных линейных элементов (A_0, L_m) и распределение K гиперплоскостных элементов (A_0, L_{n-1}) – с отношением инцидентности их текущих элементов в общем центре $A_0 : A_0 \in L_m \subset L_{n-1}$, m<n-1.

При голономности (то есть при обращении в нуль кососимметричного тензора $\Lambda^{\alpha}_{[ij]}$) базисного распределения M m-мерных линейных элементов гиперполосное распределение H расслаивается на (n-m)-параметрическое семейство гиперполос H_m. В п. 2 § 3 выведены дифференциальные уравнения гиперполосы H_m, построены ее поля фундаментальных геометрических объектов первого порядка. В полуизотропном полуортогональном репере гиперполоса H_m задается системой дифференциальных уравнений:

$$\omega_0^{\beta} = 0,\ \omega_i^{\alpha} = \Lambda_{ij}^{\alpha}\omega_0^j,\ \omega_{\alpha}^i = \Lambda_{\alpha j}^i \omega_0^j,\ \omega_{\nu}^n = \mathrm{A}_{\nu j}^n \omega_0^j, \text{ где } \Lambda_{[ij]}^{\beta} = 0. \tag{1}$$

Гиперполосы с полем нулевого тензора $\mathrm{A}_{\nu j}^n$ нами выделены из множества всех гиперполос H_m и, по аналогии с работой Акивиса М.А. и Василяна М.А.[2], названы гиперполосами кривизны $\widetilde{H}_m$. Доказано (§ 3, п. 3), что гиперполоса является гиперполосой кривизны $\widetilde{H}_m$ тогда и только тогда, когда в каждой точке A_0 базисной поверхности V_m характеристика L_{n-m-1} гиперплоскостного элемента L_{n-1} ортогональна касательной плоскости базисной поверхности.

§ 4 посвящен определению широты решения систем уравнений, задающих гиперполосное распределение и гиперполосу соответственно.С помощью картановской теории систем уравнений Пфаффа в инволюции[3]

---

[1] *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии. /Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР.- М.- 1975.- Т.7.- С. 117-152.

[2] *Акивис М.А., Василян М.А.* О гиперполосах кривизны в евклидовом пространстве // Ткани и квазигруппы. - Калинин, Калининский ун-т. - 1980.-С. 104-109.

[3] *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.-М.-Л.:ГИТТЛ,1948.-432с.

доказывается следующее утверждение: в собственно конформном пространстве гиперполосное распределение H определяется (п. 1 § 4) с произволом (n-m)(m+1)-1 функций от n с аргументов.Доказано, что:

- гиперполоса H_m в собственно конформном пространстве C_n существует (п. 2 § 4) с произволом 2(n-m)-1 функций от m аргументов;
- гиперполоса кривизны $\widetilde{H}_m$ в собственно конформном пространстве C_n существует (п. 3 § 4) с произволом (n-m) функций от m аргументов.

В г л а в е II в первых трех дифференциальных окрестностях построены различные поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов гиперполосы H_m, найдены внутренним образом определяемые инвариантные нормальные и касательные оснащения гиперполосы; здесь же найден порядок полного внутреннего фундаментального объекта гиперполосы.

Дифференциальные уравнения гиперполосы H_m в частично канонизированном репере нулевого порядка имеют вид (гл. II, § 1, п. 1):

$$\omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j,\ \omega_i^\nu = \Lambda_{ij}^\nu \omega_0^j,\ \omega_\nu^i = \Lambda_{\nu j}^i \omega_0^j,\ \omega_n^i = \Lambda_{nj}^i \omega_0^j, \qquad (2_1)$$

$$\omega_\nu^n = \mathrm{A}_{\nu j}^n \omega_0^j,\ \omega_n^\nu = \mathrm{A}_{nj}^\nu \omega_0^j,\ \omega_0^\alpha = \omega_n^n = 0. \qquad (2_2)$$

§ 2 второй главы посвящен построению различных внутренних оснащений гиперполосы H_m полями нормальных (n-m)-сфер и касательных m-сфер. В этом параграфе доказаны следующие утверждения:

а) инвариантное касательное оснащение гиперполосы H_m в C_n определяется внутренним образом полями квазитензоров первого порядка $\tilde{a}_\nu^0$ и $\tilde{a}_n^0$;

б) в первой дифференциальной окрестности невозможно построить внутренним образом инвариантное нормальное, а следовательно, и полное оснащение гиперполосы H_m в C_n;

в) поле квазитензора второго порядка $\frac{1}{m}a_k$ внутренним образом определяет инвариантное нормальное оснащение гиперполосы H_m;

г) касательное оснащение гиперполосы H_m полями квазитензоров первого порядка $\{\tilde{a}_\nu^0\}, \{\tilde{a}_n^0\}$ инвариантным внутренним образом порождает ее нормальное оснащение полем (n-m)-сфер $[P_i]$, определяемым полем квазитензора $\tilde{b}_i^0$ второго порядка;

д) поле нормальных (n-m)-сфер $[P_i]$, задаваемое полем квазитензора второго порядка $\frac{1}{m}a_k$, в третьей дифференциальной окрестности индуцирует внутренним образом поле касательных m-сфер $[P_\alpha]$, определяемое полями квазитензора $\tilde{a}_\nu^0$ первого и функции b_n^0 третьего порядков;

е) поля квазитензора второго порядка $\frac{1}{m}\tilde{B}_i$ и квазитензоров третьего порядка $\frac{1}{2m}\overline{B}_s$ и $\left(\frac{B_{ni}}{B_n}\right)$ определяют частичное оснащение гиперполосы полем нормальных (n-m)-сфер внутренним образом.

Найден полный внутренний фундаментальный объект гиперполосы H_m в C_n, а именно, доказано(§ 3, п.2), что ее фундаментальный геометрический объект третьего порядка является полным, т.е. при задании этого объекта гиперполоса H_m в C_n определяется с точностью до конформного преобразования пространства. Доказано(§ 3, п. 3), что для гиперполосы кривизны $\tilde{H}_m$ фундаментальный геометрический объект третьего порядка является полным.

Г л а в а III посвящена изучению линейных (аффинных, нормальных и конформных) связностей, индуцируемых на частично оснащенной гиперполосе H_m в C_n, а также приложению аффинных связностей к изучению геометрии ортогональных сетей на подмногообразии H_m. Отметим, что результаты этой главы получены с использованием теории связностей в расслоенных пространствах в форме, данной Г.Ф. Лаптевым[1].

В § 1 изучаются аффинные связности, индуцируемые нормальным оснащением гиперполосы полем квазитензора x_i^0. Центральный результат п.1 сформулирован в теореме III.2: индуцируемое частичным оснащением гиперполосы H_m в C_n полем нормальных (n-m)-сфер пространство аффинной связности $A_{m,m}$ без кручения (соответствующая связность обозначена $\overset{1}{\nabla}$), определяемое системой слоевых форм

$$\Theta_0^j = \omega_0^j, \Theta_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j(\omega_0^0 - x_k^0\omega_0^k) + g^{jk}x_k^0\omega_i^{n+1} + x_i^0\omega_0^j, \tag{4}$$

является вейлевым W_m с полем метрического тензора g_{ij} и дополнительной формой $\Theta = \omega_0^0 - x_i^0\omega_0^i$.

Найдено(п.1, §1) необходимое и достаточное условие того, что вейлево пространство W_m, индуцируемое частичным оснащением гиперполосы $H_m \subset C_n$ полем нормальных (n-m)-сфер, является римановым R_m.

В п.2, § 1 рассмотрена двумерная гиперполоса H_2 в четырехмерном конформном пространстве C_4. В случае, когда индуцируемое при нормальном оснащении гиперполосы H_2 в C_4 вейлево пространство W_2 является римановым R_2, найдено инвариантное аналитическое условие (необ-

[1] *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. –1953. – Т.2.- С.275-382.
Лаптев Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Тр. 4-го Всесоюзн. матем. съезда.-1964.-Т.2.-С.226-233.

ходимое и достаточное), при котором R_2 является пространством постоянной кривизны.

Кроме $\overset{1}{\nabla}$, найдены (п.3, § 1) еще четыре аффинные связности, индуцируемые при нормальном оснащении гиперполосы H_m, погруженной в пространство C_n, две из которых ($\overset{3}{\nabla}$ и $\overset{5}{\nabla}$) имеют нулевые кручения. Каждая из них определяется системой форм соответственно:

$$\overset{2}{\nabla}: \overset{2}{\Theta}{}_0^j = \omega_0^j, \overset{2}{\Theta}{}_i^j = \Theta_i^j + \delta_i^j C_k \omega_0^k, \quad (5)$$

$$\overset{3}{\nabla}: \overset{3}{\Theta}{}_0^j = \omega_0^j, \overset{3}{\Theta}{}_i^j = \Theta_i^j + a_n^{jl} b_{ikl}^n \omega_0^k, \quad (6)$$

$$\overset{4}{\nabla}: \overset{4}{\Theta}{}_0^j = \omega_0^j, \overset{4}{\Theta}{}_i^j = \Theta_i^j + a_i^{nj} \widetilde{\Lambda}_{nk} \omega_0^k, \quad (7)$$

$$\overset{5}{\nabla}: \overset{5}{\Theta}{}_0^j = \omega_0^j, \overset{5}{\Theta}{}_i^j = \Theta_i^j + a_n^{jl} D_{ikl}^n \omega_0^k. \quad (8)$$

Приведены строения компонент тензоров кручения и кривизны соответствующих пространств, изучены некоторые вопросы геометрии этих связностей.

§ 2 главы III посвящен приложениям аффинных связностей к изучению внутренней геометрии ортогональных сетей Σ_m, заданных на гиперполосе H_m в C_n. Записаны дифференциальные уравнения ортогональной сети, приведены некоторые порождаемые ею инвариантные геометрические образы (псевдофокальные гиперсферы $F_i^j = -a_{ij}^j A_0 + A_i, i \neq j,$ гармонические гиперсферы $F_i = q_i^0 A_0 + A_i$). Здесь же рассмотрены параллельное перенесение направления касательной $A_0 A_i$ к i-ой линии сети вдоль ее k-ой линии, геодезические и чебышевские сети Σ_m в аффинных связностях $\overset{p}{\nabla}$, $p = \overline{1,5}$; получены аналитические условия, характеризующие эти сети.

Доказаны следующие предложения:

- поле гармонических (n-m)-сфер $[F_i]$ ортогональной сети Σ_m внутренним образом определяет нормальное оснащение гиперполосы H_m;

- если относительно некоторого нормального оснащения гиперполосы H_m полем квазитензора x_i^0 подмногообразие H_m несет ортогональную геодезическую сеть Σ_m в аффинной связности $\overset{1}{\nabla}$ или $\overset{2}{\nabla}$, то эта сеть является сетью с совпавшими псевдофокальными гиперсферами и данное оснащение совпадает ($x_i^0 \equiv q_i^0$) с оснащением полем ее гармонических (n-m)-сфер $[F_i]$;

- если ортогональная сеть $\Sigma_m \subset H_m$ относительно некоторого нормального оснащения подмногообразия H_m является чебышевской в связности $\overset{1}{\nabla}$ или $\overset{2}{\nabla}$, то она является геодезической относительно обеих связностей; при этом данное оснащение совпадает с оснащением гиперполосы H_m полем гармонических (n-m)-сфер $[F_i]$ сети.

На нормально оснащенной гиперполосе H_m в расслоении нормальных линейных элементов L_{n-m} найдены (§ 3) две нормальные связности $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{2}{\nabla}{}^{\perp}$; приведены строения тензоров кривизны-кручения соответствующих пространств.

Доказано(п.1, §3), что:

-на нормально оснащенной полем (n-m)-сфер $[P_i]$ гиперполосе H_m в C_n в расслоении нормальных линейных элементов индуцируется нормальная связность $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$, определяемая системой форм $\{\Theta^{\bar{\alpha}}_{\beta}\}$:

$$\begin{aligned}&\Theta^0_v = \omega^0_v - x^0_i\omega^i_v, \Theta^0_n = \omega^0_n - x^0_i\omega^i_n, \Theta^n_v = \omega^n_v, \quad \Theta^u_n = \omega^u_n,\\ &\Theta^u_v = \omega^u_v - \delta^u_v(\omega^0_0 - x^0_k\omega^k_0), \Theta^n_n = \omega^n_n - (\omega^0_0 - x^0_k\omega^k_0);\end{aligned} \tag{9}$$

система форм $\{\Theta^{\alpha}_{\beta}\}$ определяет подсвязность $\tilde{\nabla}^{\perp}$ связности $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$, а подсвязность $\tilde{\tilde{\nabla}}^{\perp}$ связности $\tilde{\nabla}^{\perp}$ определяется системой форм $\{\Theta^u_v\}$;

- если нормальная связность $\tilde{\tilde{\nabla}}^{\perp}$, индуцируемая нормальным оснащением гиперполосы H_m в C_n - плоская, то вейлево пространство W_m является римановым;

- если нормальная подсвязность $\tilde{\nabla}^{\perp}$, индуцируемая нормальным оснащением гиперполосы кривизны $\tilde{H}_m$ в C_n - плоская (то есть связность $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$ – полуплоская), то вейлево пространство W_m является римановым.

Во втором пункте § 3 построена нормальная связность $\overset{2}{\nabla}{}^{\perp}$, определяемая системой форм:

$$\overset{2}{\Theta}{}^{\beta}_{\alpha} = \Theta^{\beta}_{\alpha}, \overset{2}{\Theta}{}^0_v = \Theta^0_v + \tilde{A}_{vk}\omega^k_0, \overset{2}{\Theta}{}^0_n = \Theta^0_n + \tilde{A}_{nk}\omega^k_0; \tag{10}$$

найдено строение тензора кривизны-кручения этого пространства нормальной связности. Доказано, что нормальные связности $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{2}{\nabla}{}^{\perp}$ совпадают тогда и только тогда, когда гиперполоса является гиперполосой кривизны.

§ 4 посвящен изучению конформных связностей, индуцируемых касательным оснащением гиперполосы H_m, погруженной в конформное пространство C_n.

Центральным результатом §4 является следующее утверждение: частичное оснащение гиперполосы H_m в C_n полем касательных m-сфер индуцирует конформную связность $\overset{1}{K}$ без кручения. Она определяется системой форм:

$$\Omega_0^j=\omega_0^j,\quad \Omega_0^0=\omega_0^0,\quad \Omega_i^j=\omega_i^j,\Omega_i^0=\omega_i^0-x_\alpha^0\omega_i^\alpha-\frac{1}{2}g^{uv}x_u^0x_v^0\omega_i^{n+1}-\frac{1}{2}(x_n^0)^2\omega_i^{n+1}\quad(11)$$

и дополнительной системой форм

$$\Omega_{n+1}^j=-g^{jk}\Omega_k^0,\Omega_i^{n+1}=\omega_i^{n+1},\Omega_0^{n+1}=\omega_0^{n+1}=0,\Omega_{n+1}^0=\omega_{n+1}^0=0.\quad(12)$$

С использованием теории связностей в расслоенных пространствах, развитой Г.Ф. Лаптевым, получены (§ 4) еще три конформные связности $\overset{2}{K}-\overset{4}{K}$ без кручения. Найдены строения тензоров кривизны-кручения соответствующих пространств конформной связности.

III. Основные результаты диссертации, выносимые на защиту

Построены основы конформно-дифференциальной геометрии гиперполосы, что выражено в следующих основных результатах:

1. В собственно конформном пространстве C_n гиперполоса H_m определена системой дифференциальных уравнений с использованием подобъектов гиперполосного распределения H, то есть неголономной гиперполосы.
2. Доказаны теоремы существования гиперполосного распределения, общей гиперполосы и гиперполосы кривизны.
3. Для гиперполосы H_m в разных дифференциальных окрестностях построены инвариантные внутренним образом определяемые нормальные и касательные оснащения.
4. Доказана полнота внутреннего фундаментального объекта общей гиперполосы, а также гиперполосы кривизны.
5. Найдены пять аффинных связностей, индуцируемых нормальным оснащением гиперполосы и рассмотрены некоторые вопросы геометрии этих связностей, получены приложения их к изучению геометрии ортогональных сетей.
6. В расслоении нормальных (n-m)-мерных линейных элементов гиперполосы H_m найдены индуцируемые ее нормальным оснащением две нормальные связности.
7. Показано, что касательное оснащение гиперполосы H_m в C_n индуцирует четыре конформные связности без кручения.

IV. Работы автора, опубликованные по теме диссертации

1. *Михайлова А.Н.* Дифференциальные уравнения гиперполосного распределения в конформном пространстве // Сб. научных трудов докторантов, научных сотрудников и аспирантов. - Чебоксары: ЧГПУ.- 1999.- Вып.6. - С. 161-166.
2. *Михайлова А.Н.* Теоремы существования гиперполос в конформном пространстве // Сб. научных трудов докторантов, научных сотрудников, аспирантов и студентов. – Чебоксары: ЧГПУ.- 2000.- Вып.7.- С. 25-30.
3. *Михайлова А.Н.* О некоторых внутренних оснащениях конформного пространства // Сб. научных трудов докторантов, научных сотрудников и аспирантов.-Чебоксары: ЧГПУ.-2000.-Вып.8.- С.10-15.
4. *Михайлова А.Н.* Поля касательных m-сфер и нормальных (n-m)-сфер гиперполосы // Вестник ЧГПУ им. И.Я.Яковлева (физико-математические науки). – Чебоксары. -2000.- №1(14).-С.47-54.
5. *Михайлова А.Н.* Внутренние оснащения гиперполосы в конформном пространстве // ВИНИТИ РАН.-2000.-№1497.-В2000Деп. - 17с.
6. *Михайлова А.Н.* Линейные связности на частично оснащенной гиперполосе конформного пространства // ВИНИТИ РАН.-2001. - №719.-В2001Деп. - 19 с.
7. *Михайлова А.Н.* Аффинные связности на частично оснащенной гиперполосе конформного пространства. /Тезисы докл. IX Межд. коференции «Математика. Экономика. Экология. Образование». Чебоксары,ЧГУ. - 2001.-С. 53.
8. *Михайлова А.Н.* Полный фундаментальный объект гиперполосы в конформном пространстве // Вестник ЧГПУ им. И.Я.Яковлева (физико-математические науки).– Чебоксары. - 2001.- №2(21)-С. 44-53.
9. *Михайлова А.Н.* Аффинные связности и сети на нормально оснащенной гиперполосе конформного пространства // ВИНИТИ РАН .- 2001.- № 1950. -В2001Деп. – 14 с.
10. *Михайлова А.Н.* Ортогональные сети на гиперполосе конформного пространства / Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского. Том 12. Материалы межд. молодежной школы-конф. «Лобачевские чтения». – Казань.-2001.- С.103-104.

Подписано к печати __________ 2002г. Формат бумаги 60x84/16. Усл.п.л. 1.
Тираж 100 экз. Заказ № __________. Бесплатно.

Отдел оперативной полиграфии
Чувашского государственного педагогического университета.
428000, Чебоксары, К.Маркса, 38.